Universität Konstanz
Lehrstuhl für Praktische Informatik
Prof. Dr. D. Wagner / Sabine Cornelsen

Entwurf und Analyse von Algorithmen
WS 2000/2001

11. Übungsblatt

Ausgabe: 26. Januar 2001 **Abgabe:** 2. Februar 2001, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Zu Beginn des Semesters wurden die eng verwandten $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme „Knotenüberdeckung“ und „Unabhängige Menge“ vorgestellt.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Zeigen Sie, daß es keinen polynomialen absoluten Approximationsalgorithmus zur Bestimmung einer minimalen Knotenüberdeckung gibt, es sei denn $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

In einem Graphen $G = (V, E)$ heißt eine Kantenmenge $E' \subseteq E$ ein *Matching* von G, wenn keine zwei Kanten aus E' einen Endpunkt gemeinsam haben. Ein Matching E' heißt *inklusionsmaximal*, wenn es zu jeder Kante $e \in E \setminus E'$ mindestens eine Kante $e' \in E'$ gibt, so daß e und e' einen Endpunkt gemeinsam haben.

Geben Sie einen Algorithmus an, der in linearer Laufzeit zu einem gegebenen Graphen ein inklusionsmaximales Matching bestimmt.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Entwerfen Sie, ausgehend von einem inklusionsmaximalen Matching, einen polynomialen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ mit relativer Gütegarantie zur Bestimmung einer minimalen Knotenüberdeckung und berechnen Sie $R_{\mathcal{A}}$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Betrachten Sie den Algorithmus $\mathcal{B}$, der mit Hilfe des Algorithmus $\mathcal{A}$ aus Aufgabe 3 eine Knotenüberdeckung V' zu einem gegebenen Graphen G findet und der dann als Ergebnis die unabhängige Menge $V'' = V \setminus V'$ liefert. Sei $OPT(G)$ die Kardinalität einer maximalen unabhängigen Menge in G.

Zeigen Sie, daß es für jede natürliche Zahl K einen Graphen G und ein maximales Matching E' von G gibt, so daß für $\mathcal{B}$ unter Verwendung von E' die Ungleichungen

$$\mathcal{B}(G) > 0 \quad \text{und} \quad \frac{OPT(G)}{\mathcal{B}(G)} > K$$

gelten.