UNIVERSITÄT KONSTANZ
LEHRSTUHL FÜR PRAKTISCHE INFORMATIK
Prof. Dr. D. Wagner / Sabine Cornelsen

Entwurf und Analyse von Algorithmen
WS 2000/2001

9. Übungsblatt

Ausgabe: 11. Januar 2001 **Abgabe:** 19. Januar 2001, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Definition:

Ein **binärer Suchbaum** ist in einem binären Baum organisiert. Für jeden Knoten werden die Zeiger ℓ (linker Nachfolgerknoten), r (rechter Nachfolgerknoten) und p (Vorgängerknoten) verwaltet. Fehlt ein Vorgänger- bzw Nachfolgerknoten, so zeigt der entsprechende Zeiger auf NIL. Diejenigen NIL-Knoten, die Nachfolgerknoten sind, heißen Blätter. Die Knoten, die nicht NIL sind, heißen innere Knoten. Jedem inneren Knoten x ist ein Schlüsselwert wert(x) zugeordnet, der die „Binäre-Suchbaum-Eigenschaft" erfüllt:

$$\begin{array}{ll} \text{wert}(y) \leq \text{wert}(x) & \text{falls } y \text{ im linken Unterbaum von } x \text{ ist.} \\ \text{wert}(y) \geq \text{wert}(x) & \text{falls } y \text{ im rechten Unterbaum von } x \text{ ist.} \end{array}$$

Aufgabe 1: **4 Punkte**

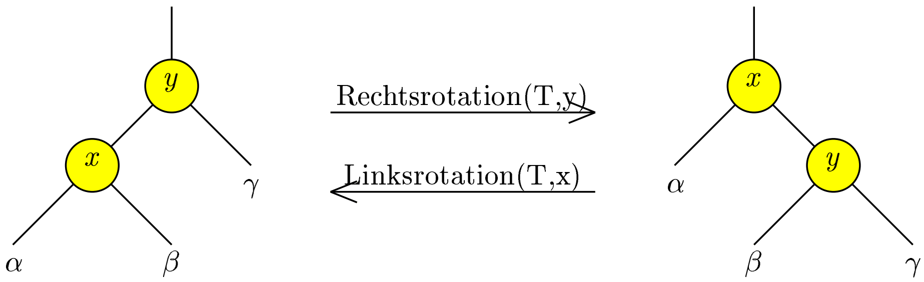
Sei h die Höhe eines binären Suchbaumes. Überlegen Sie sich je einen Algorithmus, der in $\mathcal{O}(h)$ Zeit

(a) das Maximum aller Schlüsselwerte berechnet.

(b) den größten Schlüsselwert, der kleiner als wert(x) ist, d.h. den Vorgänger von wert(x), berechnet, falls dieser existiert. (Sie können für diesen Aufgabenteil annehmen, daß jeder Schlüsselwert höchstens einmal vorkommt.)

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Zeigen Sie, daß die beiden Operationen Rechts- und Linksrotation, wie sie im Bild dargestellt sind, die „Binäre-Suchbaum-Eigenschaft" erhalten.



Definition:

Ein **Rot-Schwarz-Baum** ist ein spezieller binärer Suchbaum. Jedem Knoten ist zusätzlich eine Farbe zugeordnet, so daß die vier „Rot-Schwarz-Eigenschaften“ gelten:

1. Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.
2. Die Blätter sind schwarz.
3. Beide Nachfolgerknoten eines roten Knoten sind schwarz.
4. Jeder absteigende Pfad von einem Knoten zu einem Blatt, enthält die gleiche Anzahl schwarzer Knoten.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Die schwarze Höhe eines Rot-Schwarz-Baumes ist die Anzahl der schwarzen Knoten auf einem Weg von der Wurzel zu einem Blatt – die Wurzel selbst nicht mitgerechnet. Zeigen Sie, daß für einen Rot-Schwarz-Baum mit n inneren Knoten, Höhe h und schwarzer Höhe s die folgenden Ungleichungen gelten.

(a) $n \geq 2^s - 1$

(b) $h \leq 2 \log_2(n+1)$

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Sie wenden den nebenstehenden Algorithmus Einfüge(T,z) auf einen Rot-Schwarz-Baum T und einen bisher noch nicht in T vorhandenen Knoten z an. Welche der „Rot-Schwarz-Eigenschaften“ bleiben dabei erhalten, welche nicht? Wie sieht es mit der „Binäre-Suchbaum-Eigenschaft“ aus?

```
EINFÜGE(T,z)
y := NIL;
x := Wurzel(T);
solange x ≠ NIL
        y := x;
        falls wert(z) < wert(x)
                x := ℓ(x);
        sonst
                x := r(x);
p(z) := y;
falls y =NIL
        Wurzel(T) := z;
sonst
        falls wert(z) < wert(y)
                ℓ(y) := z;
        sonst
                r(y) := z;
Farbe(z) := rot;
```

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Wenden Sie den untenstehenden Algorithmus RS-Einfüge(T,x) auf einen anfangs leeren Rot-Schwarz-Baum T und eine Folge von Knoten mit den Schlüsselwerten $41, 38, 31, 12, 19, 42$ an. Ist das Ergebnis ein Rot-Schwarz-Baum? Wie oft können im Allgemeinen die Zeilen 11 – 16 durchlaufen werden? Wie oft kann die Solange-Schleife in Zeile 2 höchstens durchlaufen werden? Welche der „Rot-Schwarz-Eigenschaften“ bleiben nach jedem Durchlauf der Solange-Schleife erhalten? Wie sieht es mit der „Binäre-Suchbaum-Eigenschaft“ aus?

RS-Einfüge(T,x)

1\. Einfüge(T,x);
2\. solange $x \neq$ Wurzel(T) und $p(x) \neq$ Wurzel(T) und Farbe$(p(x))$ = rot
3\.   falls $p(x) = \ell(p(p(x)))$
4\. $y := r(p(p(x)))$;
5\.   falls Farbe(y) = rot
6\.   Farbe$(p(x))$:= schwarz;
7\.   Farbe(y) := schwarz;
8\.   Farbe$(p(p(x)))$:= rot;
9\. $x := p(p(x))$;
10\.   sonst
11\.   falls $x = r(p(x))$
12\. $x := p(x)$;
13\.   Linksrotation(T, x);
14\.   Farbe$(p(x))$:= schwarz;
15\.   Farbe$(p(p(x)))$:= rot;
16\.   Rechtsrotation$(T, p(p(x)))$;
17\.   sonst
19\.   (das gleiche mit rechts und links vertauscht);
18\. Farbe(Wurzel(T)) := schwarz;