8. Übungsblatt

Ausgabe: 15. Dezember 2000 **Abgabe:** 22. Dezember 2000, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: 6 Punkte

(a) Sei $D = (V, E)$ ein gerichteter Graph und seien $s \in V$ und $t \in V$ zwei Knoten, so daß $d^+(s) - d^-(s) = \ell = d^-(t) - d^+(t)$[1] und $d^+(v) = d^-(v)$ für $v \in V \setminus \{s, t\}$. Zeigen Sie, daß es ℓ kantendisjunkte gerichtete $s - t$ Wege in D gibt.

(b) Sei $N = (D; s, t; c \equiv 1)$ ein Fluß-Netzwerk. Zeigen Sie, daß die maximale Anzahl der kantendisjunkten gerichteteten $s - t$ Wege dem Wert eines maximalen Flusses in N entspricht.

(c) Folgern Sie, daß die maximale Anzahl der kantendisjunkten gerichteteten $s - t$ Wege dem Wert eines minimalen $s - t$ Schnittes in einem gerichteten ungewichteten Graphen entspricht.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Betrachten Sie das folgende Problem auf einem gerichteten Graphen $D = (V, E)$ mit einer Bedarfsfunktion $b : V \to \mathbb{R}$, die die Gleichung

$$\sum_{v \in V} b(v) = 0 \tag{1}$$

erfüllt. Es ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{\substack{w \in V \\ (v,w) \in E}} f(v, w) \; - \sum_{\substack{w \in V \\ (w,v) \in E}} f(w, v) \; = \; b(v) \tag{2}$$

für $v \in V$ gesucht. So eine Funktion soll wieder *Fluß* genannt werden.

(a) Zeigen Sie, daß die Bedingung in Gleichung 1 notwendig für die Existenz eines solchen Flusses ist. Ist sie auch hinreichend?

(b) Bleibt die Menge der zulässigen Lösungen $f : E \to \mathbb{R}$ gleich, wenn man in Gleichung 2 „=“ durch „$\geq$“ ersetzt?

[1] Für einen Knoten $v \in V$ ist $d^+(v) = \#\{w \in V; (v, w) \in E\}$ und $d^-(v) = \#\{w \in V; (w, v) \in E\}$.

[bitte wenden]

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Ein *Polygon* $P = < p_1, \ldots, p_n >$ ist eine stückweise lineare geschlossene Kurve in der Ebene, die aus den Strecken $\overline{p_i p_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n-1$ und $\overline{p_n p_1}$ – den *Seiten* des Polygons – besteht. Die Punkte $p_1, \ldots, p_n$, heißen *Ecken* des Polygons. Ein Polygon ist einfach, wenn es ein injektives Bild des Einheitskreises ist. Ein einfaches Polygon zerteilt die Ebene in zwei Teile, einen beschränkten Teil, das *Innere* des Polygons und einen unbeschränkten Teil, das *Äußere* des Polygons.

Entwerfen Sie einen Linearzeitalgorithmus, der testet, ob ein Punkt p im Inneren eines einfachen Polygons liegt. (Hinweis: Zählen Sie wie oft eine Halbgerade, die in p endet, die Seiten des Polygons schneidet.)