6. Übungsblatt

Ausgabe: 1. Dezember 2000 **Abgabe:** 8. Dezember 2000, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und Kantengewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}$. Für zwei Knoten s und t in G bezeichne $(S_{st}, V \setminus S_{st})$ einen s-t-Schnitt minimalen Gewichts in G und $c_{st} = c(S_{st}, V \setminus S_{st})$ das Gewicht eines solchen Schnittes.

(a) Sei $v_1, v_2, \ldots, v_k$ eine beliebige Folge von paarweise verschiedenen Knoten in G. Zeigen Sie: $c_{v_1,v_k} \geq \min\{c_{v_1,v_2}, c_{v_2,v_3}, \ldots, c_{v_{k-1},v_k}\}$.

(b) Zeigen Sie: Unter den $\frac{n(n-1)}{2}$ Werten c_{uv} für alle möglichen Knotenpaare befinden sich höchstens $(n-1)$ paarweise verschiedene Zahlen.

Hinweis: Betrachten Sie den vollständigen Graphen $G' = K_n$ mit den Kantengewichten $c'(\{u, v\}) = -c_{uv}$. Sei T' ein MST von G'. Begründen Sie, daß es zu jeder Nichtbaumkante $\{u, v\}$ in G' eine Baumkante $\{x, y\}$ in T' gibt, so daß $c_{uv} = c_{xy}$ gilt. Warum folgt daraus sofort die zu zeigende Aussage ?

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Zwei Schnitte $(S, V \setminus S)$ und $(T, V \setminus T)$ in einem Graph $G = (V, E)$ *kreuzen sich*, wenn keine der Mengen $A := S \cap T$, $B := S \setminus T$, $C := T \setminus S$ und $D := V \setminus (S \cup T)$ leer ist. Sei $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ eine Kantengewichtsfunktion auf G.

(a) Sind $(S, V \setminus S)$ und $(T, V \setminus T)$ zwei sich kreuzende Schnitte minimalen Gewichts λ in G, so gilt $c(A, D) = c(B, C) = 0$ und $c(A, B) = c(B, D) = c(D, C) = c(C, A) = \lambda/2$.

(b) Sind s und t zwei adjazente Knoten mit $c(\{s, t\}) > 0$, so enthält die Menge der minimalen Schnitte von G, die s und t trennen, keine zwei sich kreuzenden Schnitte.

[bitte wenden]

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ und der Kantengewichtsfunktion $c \equiv 1$. Sei A die Adjazenzmatrix von G und D die $n \times n$ Matrix, auf deren Diagonale die Knotengrade stehen, d.h. $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit

$$d_{ij} = \begin{cases} d_G(i) & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da die Matrix $L := D - A$ symmetrisch ist, sind die Eigenwerte von L alle reell und es gibt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren[1] von L.

(a) Zu einem $a \in \mathbb{R}$ sei für eine Teilmeng $S \subset V$ der Indikatorvektor $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ von S definiert durch $x_i = a$, falls $i \in S$ und $x_i = a - 1$ sonst. Zeigen Sie

$$c(S, V \setminus S) = \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2.$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^t L x = \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2$.

(c) Ist v ein Eigenvektor von L zum Eigenwert λ, so gilt $\lambda = \frac{v^t L v}{v^t v} \geq 0$.

(d) Der kleinste Eigenwert von L ist $\lambda_0 = 0$ mit zugehörigem Eigenvektor $(1, \ldots, 1)^t$.

(e) Zwischen dem zweitkleinsten Eigenvektor λ_1 und dem Gewicht λ eines minimalen Schnittes in G gilt die Beziehung

$$\lambda_1 \leq \lambda(1 + \frac{1}{n-1}).$$

Aufgabe 4: **2 Punkte**

An welcher Stelle im Korrektheitsbeweis zum Algorithmus von Stoer und Wagner wurde verwendet, daß die Kantengewichte nicht negativ sind? Finden Sie ein Beispiel eines Graphen mit negativen Kantengewichten und einen Startknoten a, so daß der Algorithmus von Stoer und Wagner keinen minimalen Schnitt liefert.

[1] Ein Vektor $v \neq 0$ heißt Eigenvektor einer Matrix A, wenn es eine Zahl λ mit $Av = \lambda v$ gibt. Die Zahl λ heißt dann Eigenwert von A.