Universität Konstanz
Lehrstuhl für Praktische Informatik
Prof. Dr. D. Wagner / Sabine Cornelsen

5. Übungsblatt

Ausgabe: 24. November 2000 **Abgabe:** 1. Dezember 2000, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: 6 Punkte

(a) Zeigen Sie: Wenn in einem Graph G mit reellen Kantengewichten für jeden Schnitt die den Schnitt kreuzende Kante minimalen Gewichts eindeutig ist, dann hat G einen eindeutigen aufspannenden Baum minimalen Gewichts.

(b) Gilt die Umkehrung von (a)?

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn in einem Graph G mit reellen Kantengewichten alle Kanten paarweise verschiedene Gewichte haben, dann hat G einen eindeutigen aufspannenden Baum minimalen Gewichts.

(d) Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung der Aussage in (c).

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit einer Kantengewichtsfunktion c.

(a) Für je zwei Knoten u und v ist ein Weg von u nach v gesucht, so daß das maximale Kantengewicht, das auf diesem Weg auftritt, möglichst klein ist. Zeigen Sie, daß dieses Problem durch das Bestimmen eines MST in G gelöst werden kann.

(b) Ein kürzester Weg zwischen u und v in G ist ein Weg $u = v_0, \ldots, v_k = v$ in G, der die Summe $\sum_{i=1}^{k} c(\{v_{i-1}, v_i\})$ minimiert. Zeigen oder widerlegen Sie: Ist T ein aufspannender Baum minimalen Gewichts für G, so ist der Weg von u nach v in T ein kürzester Weg von u nach v in G.

Aufgabe 3: 6 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit m Kanten und n Knoten. Sei 2^E die Potenzmenge von E und sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Ferner sei mit $E_1 \Delta E_2 := E_1 \setminus E_2 \cup E_2 \setminus E_1$ die symmetrische Differenz zweier Mengen $E_1, E_2 \subset E$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, daß 2^E mit der symmetrischen Differenz als Addition ein Vektorraum der Dimension m über $\mathbb{F}_2$ ist.

(b) Sei $E_S \subset 2^E$ die Menge aller Schnitte in G. Zeigen Sie, daß E_S einen Untervektorraum von 2^E der Dimension $n - 1$ induziert.