Universität Konstanz
Lehrstuhl für Praktische Informatik
Prof. Dr. D. Wagner / Sabine Cornelsen

Entwurf und Analyse von Algorithmen
WS 2000/2001

4. Übungsblatt

Ausgabe: 17. November 2000 **Abgabe:** 24. November 2000, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Zeigen Sie, daß für einen Graphen mit n Knoten und m Kanten die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) G ist zusammenhängend und enthält keinen Kreis.

(b) Zwischen je zwei Knoten in G gibt es genau einen Pfad in G.

(c) G ist zusammenhängend und $m = n - 1$.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $n \geq 2$ Knoten. Sei B die Inzindenzmatrix von G und sei C die Matrix die aus B entsteht, indem in jeder der Spalten genau eine der beiden 1en durch eine -1 ersetzt wird.

(a) Sei N eine $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die aus C entsteht, indem eine Zeile und alle bis auf $n-1$ Spalten gestrichen werden. Sei $E(N)$ die Menge der $n-1$ Kanten von G, die den Spalten in N entsprechen und sei $T = (V, E(N))$. Zeigen Sie:

$$\det N = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls T ein Baum ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Aufgabe 1c und Aufgabe 3.

(b) Sei M_{ii} die Matrix die aus CC^T entsteht, wenn man die i-te Zeile und Spalte löscht. Die Determinante von M_{ii} kann durch die Formel

$$\det M_{ii} = \sum \det N \cdot \det N^T,$$

berechnet werden, wobei über alle $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrizen von C, die nicht die i-te Zeile enthalten, summiert wird. Verwenden Sie diese Formel (ohne Beweis), um zu zeigen, daß es $\det M_{ii}$ aufspannende Bäume von G gibt.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Methode die Anzahl der aufspannenden Bäume eines vollständigen Graph.

[bitte wenden]

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Ein Baum mit mehr als nur einem Knoten hat mindestens zwei Blätter.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Eine Kante e heiße *leicht*, wenn es einen Schnitt gibt, so daß e unter allen Kanten, die diesen Schnitt kreuzen, minimales Gewicht hat. Geben Sie einen gewichteten Graphen an, so daß die Menge der leichten Kanten keinen minimal aufspannenden Baum induziert.