UNIVERSITÄT KONSTANZ
LEHRSTUHL FÜR PRAKTISCHE INFORMATIK
Prof. Dr. D. Wagner / Sabine Cornelsen

Entwurf und Analyse von Algorithmen
WS 2000/2001

3. Übungsblatt

Ausgabe: 10. November 2000 **Abgabe:** 17. November 2000, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: 6 Punkte

Eine Folge von m Operationen MAKESET, FIND (mit Pfadkompression) und UNION (mit *balancing*) werde so ausgeführt, daß alle UNION-Operationen vor der ersten FIND-Operation ausgeführt werden.

(a) Zeigen Sie, daß der Gesamtaufwand für die m Operationen in $\mathcal{O}(m)$ liegt.

(b) Was passiert, wenn zwar die FIND-Operationen weiterhin mit Pfadkompression, die UNION-Operationen aber ohne *balancing* ausgeführt werden?

(c) Wie sieht es aus, wenn die UNION-Operationen wieder mit *balancing*, die FIND-Operationen jetzt aber ohne Pfadkompression ausgeführt werden?

Aufgabe 2: 4 Punkte

Graustufenbilder seien gegeben als $(m \times n)$-Matrizen mit den Werten $\{1, 2, \ldots, k\}$ (den Graustufen). Zwei Bildpunkte (i_1, j_1) und (i_2, j_2) heißen *benachbart*, wenn sie den gleichen Grauwert haben und $|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| \leq 1$ gilt. Der transitive Abschluss dieser symmetrischen Relation ist eine Äquivalenzrelation.

(a) Formulieren Sie einen Algorithmus zur Bestimmung der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation auf der Basis von UNION-FIND, der mit $\mathcal{O}(m \cdot n)$ UNION- und FIND-Operationen auskommt.

(b) Formulieren Sie aussagekräftige Invarianten für Ihren Algorithmus, aus denen die Korrektheit leicht ersichtlich ist.

[bitte wenden]

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein endlicher Automat. Mit $|w|$ sei die Länge eines Wortes $w \in \Sigma^*$ und mit w^i die i-fache Hintereinanderreihung von w bezeichnet. Sei $z \in L(\mathcal{A})$ ein Wort der Länge $|z| \geq |Q|$. Zeigen Sie, daß sich z in drei Teile $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ zerlegen läßt, so daß für alle $i \geq 0$ auch $uv^iw \in L(\mathcal{A})$. (Hinweis: Sei $z = a_1 \ldots a_m$. Zeigen Sie, daß unter den Zuständen $s, \delta(s, a_1), \ldots, \delta(s, a_1 \ldots a_{|Q|})$ mindestens zwei gleich sind.)

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Zeigen Sie, daß es für die Menge $L = \{0^{k^2}; k \in \mathbb{N}\}$ keinen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ mit $L = L(\mathcal{A})$ gibt. (Hinweis: Aufgabe 3)