Lösungen zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 2

$$L_{leer} := \{\langle\mathcal{M}\rangle\,; L(\langle\mathcal{M}\rangle) = \emptyset\}$$

Beh.: L_{leer} ist nicht entscheidbar.

Bew.:

- Betrachte Funktion $f : \Sigma^* \to \{0,1\}$ mit $f(w) = 0$ für alle $w \in \Sigma^*$

  Satz von Rice mit $S = \{f\}$
  $\Rightarrow L(S) = \{\langle\mathcal{M}\rangle\,; \langle\mathcal{M}\rangle \text{ berechnet } f\}$
  ist nicht entscheidbar

- Annahme: L_{leer} ist entscheidbar

- Dann gibt es eine Turingmaschine $\mathcal{M}_{leer}$, die L_{leer} akzeptiert und auf alle Eingaben hält.

- Konstruiere Turingmaschine $\mathcal{M}_S$, die $L(S)$ akzeptiert und auf alle Eingaben hält:
  - Eingabe für $\mathcal{M}_S$ ist $\langle\mathcal{M}\rangle$
  - $\langle\mathcal{M}\rangle$ wird in $\langle\mathcal{M}'\rangle$ abgeändert:
    - Neuer Zustand n in $\mathcal{M}'$
    - Falls $\mathcal{M}$ in Zustand q hält geht $\mathcal{M}'$ in Zustand n über
    - Wenn nun $\mathcal{M}'$ in Zustand n ist steht die Ausgabe von $\mathcal{M}$ auf dem Band. $\mathcal{M}'$ liest diese Ausgabe: Falls die Ausgabe 1 ist geht $\mathcal{M}'$ in den Endzustand, sonst hält $\mathcal{M}'$ in n (nicht Endzustand)
  - $\mathcal{M}_{leer}$ wird auf Eingabe $\langle\mathcal{M}'\rangle$ angewendet

  $\to$ $\mathcal{M}_S$ hält wie $\mathcal{M}_{leer}$ auch auf jede Eingabe

  Fall I: $\mathcal{M}_S$ akzeptiert $\langle\mathcal{M}\rangle$
  $\Rightarrow \mathcal{M}_{leer}$ akzeptiert $\langle\mathcal{M}'\rangle$
  $\Rightarrow \mathcal{M}'$ akzeptiert *kein* Wort
  $\Rightarrow f(w) = 0$ für alle $w \in \Sigma^*$
  $\Rightarrow \mathcal{M} \in L(S)$ $\surd$

  Fall II: $\mathcal{M}_S$ akzeptiert $\langle\mathcal{M}\rangle$ nicht $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_{leer}$ akzeptiert $\langle\mathcal{M}'\rangle$ nicht $\Rightarrow$ $\mathcal{M}'$ akzeptiert $w \in \Sigma^*$
  $\Rightarrow f(w) = 1 \Rightarrow \mathcal{M} \notin L(S)$ $\surd$

- $\lightning$ Widerspruch, da $L(S)$ nicht entscheidbar ist

Alternativer Beweis ohne Satz von Rice:
Annahme: L_{leer} ist entscheidbar.
$\Rightarrow \exists$ TM $\mathcal{M}_{leer}$, mit $L(\mathcal{M}_{leer}) = L_{leer}$, die stets hält.
Konstruiere TM $\overline{\mathcal{M}_u}$, die L_u akzeptiert und stets hält:

- Eingabe ist $\langle\mathcal{M}\rangle\, v$

- Ermittle $\langle\mathcal{M}'\rangle$, die Gödelnummer einer Turingmaschine $\mathcal{M}'$, die zuerst das Band löscht, das Wort $\langle\mathcal{M}\rangle\, v$ auf das Band schreibt und dann die universelle Turingmaschine ,,startet".

- Wende $\mathcal{M}_{leer}$ auf Eingabe $\langle\mathcal{M}'\rangle$ an:
  $\mathcal{M}_{leer}$ akzeptiert $\to$ $\overline{\mathcal{M}_u}$ akzeptiert $\langle\mathcal{M}\rangle\, v$ nicht
  $\mathcal{M}_{leer}$ akzeptiert nicht $\to$ $\overline{\mathcal{M}_u}$ akzeptiert $\langle\mathcal{M}\rangle\, v$

- **Fall I**: $\langle\mathcal{M}\rangle\, v$ wird akzeptiert $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_{leer}$ akzeptiert $\langle\mathcal{M}'\rangle$ nicht $\Rightarrow$ $\mathcal{M}'$ akzeptiert ein Wort $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ akzeptiert v $\Rightarrow$ $\langle\mathcal{M}\rangle\, v \in L_u$

- **Fall II**: $\langle\mathcal{M}\rangle\, v$ wird nicht akzeptiert $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_{leer}$ akzeptiert $\langle\mathcal{M}'\rangle$ $\Rightarrow$ $\mathcal{M}'$ akzeptiert *kein* Wort $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ akzeptiert v nicht $\Rightarrow$ $\langle\mathcal{M}\rangle\, v \notin L_u$

$\lightning$ Widerspruch, L_u ist nicht entscheidbar

Aufgabe 4a: Das Halteproblem ist semi-entscheidbar.

Bew: Wir modifizieren die universelle Turingmaschine $\mathcal{M}_u$ zu $\mathcal{M}_H$ durch:

- Der Endzustand von $\mathcal{M}_u$ sei q_2

- Jeder Übergang $(q,a) \mapsto (q,a,N)$ wird ersetzt durch $(q,a) \mapsto (q_2,a,N)$

Die universelle Turingmaschine $\mathcal{M}_u$ erhält Eingabe $\langle\mathcal{M}\rangle\, v$ und ,,simuliert" die Turingmaschine $\langle\mathcal{M}\rangle$ mit Eingabe v. Das heißt, $\mathcal{M}_u$ hält, falls $\mathcal{M}$ auf Eingabe v hält. Obige Modifikation bewirkt nun gerade, dass $\mathcal{M}_H$ dann sogar im Endzustand hält:
$\mathcal{M}_H$ akzeptiert $\langle\mathcal{M}\rangle\, v$ genau dann wenn $\langle\mathcal{M}\rangle$ die Eingabe v akzeptiert.
$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_H$ akzeptiert die Sprache des Halteproblems.
$\Rightarrow$ Das Halteproblem ist semi-entscheidbar.