# Lösungen zum 4. Übungsblatt

**Aufgabe 1:** Welche der folgenden Sprachen sind regulär?

- $L_3 = \{0^p;\ p \text{ prim }\}$

  *Behauptung*: $L_3$ ist nicht regulär.
  *Beweis*: Annahme: $L_3$ ist regulär.
  Wegen dem Pumping Lemma gilt dann, dass es ein $n \in I\!N$ gibt, so dass für jedes Wort $w \in L_3$ mit $|w| > n$ gilt:

  $$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n,\ v \neq \varepsilon \tag{1}$$

  und

  $$uv^ix \in L_3 \text{ für jedes } i \in I\!N. \tag{2}$$

  Sei also für $L_3$ ein solches $n \in I\!N$ gegeben, und $p > n$ eine Primzahl größer als $n$. Betrachte nun das Wort

  $$w' = 0^p.$$

  Nach Definition von $L_3$ ist $w'$ in $L_3$ enthalten, und $|w'| = p > n$, also gelten (1) und (2) für $w'$. Aus (1) folgt dann

  $$w' = uvx \text{ mit } |uv| \leq n \text{ und } v \neq \varepsilon, \text{ also } v = 0^k \text{ mit } 0 < k \leq n \tag{3}$$

  und mit $i = p + 1$ folgt aus (2)

  $$uv^{p+1}x \in L_3. \tag{4}$$

  Da $L_3$ nur Wörter enthält, deren Länge eine Primzahl ist, bedeutet das, dass $|uv^{p+1}x|$ eine Primzahl ist. Aber

  $$|uv^{p+1}x| = |uvx| + p \cdot |v| = p + p \cdot k = p \cdot (1 + k)$$

  ist ein Produkt zweier Zahlen die größer als eins sind ($p$ ist als Primzahl größer als eins, und $(1 + k)$ ist wegen (3) echt größer als eins) und damit keine Primzahl ↯ . Dies stellt einen Widerspruch zu $uv^{p+1}x \in L_3$ dar. Damit hat sich die Annahme als falsch herausgestellt, und $L_3$ ist nicht regulär.

  ■

- $L_4 = {L_3}^*$

  *Behauptung:*: Die durch den regulären Ausdruck $r = 00^+ \cup \varepsilon$ beschriebene Sprache ist gleich $L_4$ und damit ist $L_4$ regulär.
  *Beweis:* Wir zeigen $L_4 = L(r)$ indem wir $L_4 \subset L(r)$ und $L_4 \supset L(r)$ zeigen:

  1. $L_4 \subset L(r)$: Sei $w \in L_4$ gegeben. Da jede Primzahl größer als eins ist, gibt es in $L_3$ kein Wort der Länge eins, und somit ist $|w| \neq 1$ und $w \neq \mathtt{0}$. Da $L(r)$ alle Wörter außer $\mathtt{0}$ enthält, ist auch $w \in L(r)$.
  2. $L(r) \subset L_4$: Sei nun $w \in L(r)$ gegeben.
     *Fall 1:* $|w| = 0$, also $w = \varepsilon$. Dann ist auch $w$ in $L_4$.
     *Fall 2:* $|w| > 1$, also $w = 0^l$ mit $l > 1$. Betrachte die Primfaktorzerlegung von $l = p_1 \cdot p_2 \cdots p_N$. Da $l > 1$ gibt es solch eine Zerlegung. Damit kann $l$ auch als Summe aus lauter Summanden $p_1$ geschrieben werden:

     $$l = \sum_{j=1}^{k} p_1 \text{ wobei } k = p_2 \cdots p_N$$

Damit ist

$$w = (0^{p_1})^k$$

und mit $0^{p_1} \in L_3$ auch

$$w \in {L_3}^* = L_4$$

$\blacksquare$

**Aufgabe 2:** Charakterisieren Sie alle regulären Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}\}$.

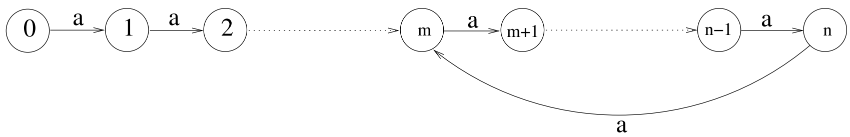
*Behauptung*: Sei $L$ eine reguläre Sprache. Dann gibt es $n, m \in I\!N$ mit $m \leq n$ und $F \subset \{0, \ldots, n\}$, so dass mit $l = (n - m + 1)$ und

$$L' = \{a^i \mid i \in F \text{ und } i < m\} \cup \{a^{i+l \cdot k} \mid k \in I\!N_0, i \in F \text{ und } m \leq i \leq n\}$$

gilt

$$L = L'$$

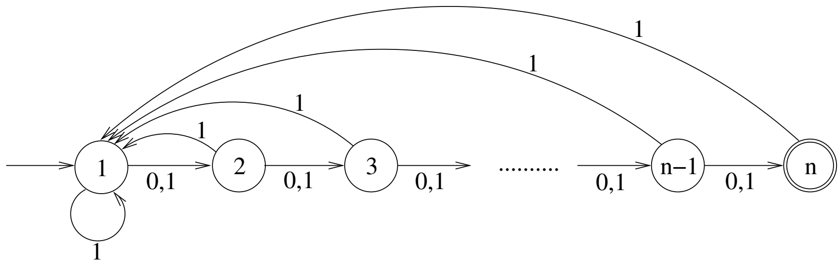
*Beweis*: $L$ wird von einem deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ akzeptiert. Da $\Sigma$ nur ein Symbol enthält, kann aus jedem Zustand nur *ein* Übergang zu einem anderen Zustand stattfinden. Sei $0$ der Startzustand. Eine $\mathtt{a}$ überführt $0$ enweder in sich selbst (dann gibt es keine anderen erreichbaren Zustände) oder in einen anderen Zustand $1$. Im letzteren Fall überführt ein weiteres $\mathtt{a}$ den Zustand $1$ entweder in $0$ oder $1$ oder in einen weiteren Zustand $2$. In den ersten beiden Fällen gibt es keinen weiteren Zustand, im letzteren Fall überführt ein weiteres $\mathtt{a}$ $2$ in $3$ und so weiter. Der Automat $\mathcal{A}$ besteht also aus erreichbaren Zuständen $Q = \{0, \ldots, n\}$ mit $\delta(i) = i + 1$ für $i < n$ und $\delta(n) = m$ mit $0 \leq m \leq n$:




Sei nun $F$ die Menge der Endzustände von $\mathcal{A}$. Dann ist die von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache gleich der oben angegebene Sprache $L'$

$\blacksquare$

**Aufgabe 4:** Für $n \geq 2$ sei der folgende NEA $\mathcal{A}_n$ gegeben.




*Behauptung*: Der aus der Potenzmengenkonstruktion entstehende DEA mit $2^n$ Zuständen ist minimal.
*Beweis*: Sei $\mathcal{A}_n = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, $Q = \{1, \ldots, n\}$ und $\mathcal{P}_n$ der Automat aus der Potenzmengenkonstruktion. Wir verwenden Satz 2.28 der Vorlesung und zeigen (1) dass jeder Zustand in $\mathcal{P}_n$ erreichbar ist, und (2) dass zwei beliebige Zustände $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ in $\mathcal{P}_n$ nicht äquivalent sind. Also hat $\mathcal{P}_n$ keine überflüßigen Zustände, und der Äquivalenzklassenautomat zu $\mathcal{P}_n$ ist gleich $\mathcal{P}_n$ und damit $\mathcal{P}_n$ minimal.

1. Sei $\tilde{q} \in 2^Q$. Dann ist $\tilde{q}$ erreichbar: Betrachte ein Wort $w$ der Länge $n$, $w = w_n w_{n-1} \cdots w_1$ mit

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in \tilde{q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Dann gilt $\tilde{\delta}(\{1\}, w) = \tilde{q}$, denn

   - $\tilde{\delta}(\{1\}, w) \supset \tilde{q}$: Sei $i \in \tilde{q}$. Nachdem $\mathcal{A}_n$ aus dem Startzustand 1 das Wort $w_n \cdots w_i$ gelesen hat, kann sich $\mathcal{A}_n$ im Zustand 1 befinden, da $w_i = 1$. Danach folgen noch $i - 1$ Symbole $w_{i-1} \cdots w_1$, und $\mathcal{A}_n$ kann sich in Zustand $i$ befinden. Also $i \in \tilde{\delta}(\{1\}, w)$.
   - $\tilde{\delta}(\{1\}, w) \subset \tilde{q}$: Sei $i \in \tilde{\delta}(\{1\}, w)$. Dann muß $w_i = 1$ gelten, da $\mathcal{A}_n$ sonst nicht in Zustand $i$ gelangen kann. Also $i \in \tilde{q}$.

2. Zu je zwei Zuständen $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in 2^Q$ mit $\tilde{q}_1 \neq \tilde{q}_2$ existiert ein Wort, das Zeuge für die Nichtäquivalenz von $\tilde{q}_1$ und $\tilde{q}_2$ ist: Da $\tilde{q}_1 \neq \tilde{q}_2$ gibt es einen Zustand $i \in Q$, der in $\tilde{q}_1$, aber nicht in $\tilde{q}_2$ ist. Betrachte das Wort $0^{n-i}$. Dann ist $n \in \delta(i, 0^{n-1})$, also $\tilde{q}_1 \in \tilde{F}$, und für alle $j \in \tilde{q}_2$ ist $n \notin \delta(j, w)$, also $\tilde{q}_w \notin \tilde{F}$. Das heisst $\tilde{q}_1$ und $\tilde{q}_2$ sind nicht äquivalent.

■