Universität Konstanz
Lehrstuhl für Praktische Informatik
Dr. Ulrik Brandes / Sabine Cornelsen

5. Übungsblatt

Ausgabe: 13. Mai 2002 **Abgabe:** 20. Mai 2002, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Die *Spur* einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonaleinträge. Sei A die Adjazenzmatrix eines schlichten ungerichteten Graphen G. Sei m die Anzahl der Kanten in G und t die Anzahl der Dreiecke, d.h. der Kreise der Länge drei, in G. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Spur} A^2 = 2m$ und $\mathrm{Spur} A^3 = 6t$ gilt.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei G eine Gruppe und $X \subseteq G$ eine Teilmenge. Der *Cayley-Graph* $\mathcal{C}(G, X)$ zu (G, X) ist der Graph mit Knotenmenge G und Kantenmenge $\{(g, h) \in G \times G;\ hg^{-1} \in X\}$.

(a) Zeigen Sie, daß es zu allen $g, h \in G$ einen Automorphismus von $\mathcal{C}(G, X)$ gibt, der g auf h abbildet. (**Hinweis:** Betrachten Sie Abbildungen $x \mapsto xg,\ g \in G$.) Daraus folgt insbesondere, daß es nur einen normierten Knotenstrukturindex auf der Klasse der nicht-isomorphen Cayley-Graphen gibt.

(b) Zeigen Sie, daß ein einfacher Kreis ein Cayley Graph ist.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Zeigen Sie, daß sich die Breitensuchnummern adjazenter Knoten eines ungerichteten Graphen höchstens um eins unterscheiden, d.h. daß

$$\{v, w\} \in E \Longrightarrow |BFS(v) - BFS(w)| \leq 1.$$

[bitte wenden]

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn es eine Partition $V = X \cup Y$ der Knotenmenge in zwei disjunkte Teilmengen X und Y gibt, so daß $E \subseteq X \times Y \cup Y \times X$ ist.

(a) Zeigen Sie, daß ein ungerichteter Graph genau dann bipartit ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

(b) Bestimmen Sie Funktionen ROOT, TRAVERSE und DONE so, daß in einer Breitensuche getestet wird, ob ein zusammenhängender ungerichteter Graph bipartit ist.

Aufgabe 5: **Keine Wertung**

Implementieren Sie eine Klasse Breitensuche und eine davon abgeleitete Klasse, die bestimmt, ob ein Multigraph bipartit ist. Können Sie den Algorithmus so erweitern, daß er ein *Zertifikat*, d.h. einen ungerichteten Kreis ungerader Länge bzw. eine entsprechende Partition der Knotenmenge, ausgibt?